Um esquema eficiente para a resolução do modelo barotrópico e das equações de águas-rasa

Fernando Luis Dias[1] & Sinara Martins Tarta[2]

[1]*Departamento de Matemática – FURG, Rio Grande, RS – dmtfld@furg..br*
[2]*Acadêmico do Curso de Matemática Licenciatura – FURG, Rio Grande, RS – sinaramt@mikrus.com.br*

RESUMO: Muitos estudos se têm feito com a combinação da técnica de separação de implicidade e algoritmos semi-implícitos, dessas elaborações várias foram aplicadas às equações da atmosfera barotrópica ou nas de águas-rasa. Porém, nem todas essas aplicações obtiveram sucesso ao serem aplicadas ao caso baroclínico por causa do erro adicional de aproximação introduzido pela técnica de separação de implicidade. No contexto desses problemas, se propõe um esquema numérico utilizando a técnica de correção de estabilidade com posterior aplicação do método FS. As propriedades deste esquema foram investigadas utilizando métodos analíticos e numéricos, confirmando a boa descrição dos campos de prognóstico e a eficiência computacional.

PALAVRAS-CHAVE: modelo barotrópico; equações de águas-rasa; técnica de correção de estabilidade; separação de implicidade; eficiência computacional.

1. INTRODUÇÃO

A resolução das equações barotrópicas constitui um ingrediente básico à modelagem dos processos atmosféricos e dos escoamentos no oceano. A rigor, o conjunto das equações barotrópicas representam de modo simplificado alguns grupos de modelos usados em modelagem hidrodinâmica; também sabemos que a análise do sistema diferencial hidrostático linearizado, pode ser reduzida ao estudo das propriedades dos sistemas barotrópicos linearizados com profundidades equivalentes que variam de 0 até $10.000\mathrm{m}$ (isto é, os sistemas barotrópicos linearizados com velocidades de propagação das ondas gravitacionais de 0 até $350\,\mathrm{m/s}$). As propriedades de aproximação, estabilidade e convergência dos esquemas hidrostáticos podem ser obtidas (a princípio), pelo estudo das propriedades respectivas dos esquemas numéricos barotrópicos, com diferentes profundidades equivalentes.

Quando se elabora um esquema numérico, deve-se ter como meta a precisão na descrição dos fenômenos investigados e a eficiência computacional do esquema de integração. A precisão é fornecida pela resolução fina ("fine mesh model") e pela condição de estabilidade do algoritmo numérico, a eficiência depende da complexidade do algoritmo usado e da presença de métodos numéricos que permitam resolver com economia "desejável" os problemas numéricos que surgem em cada passo da integração no tempo. No entanto, para que os erros de truncamento espacial e temporal sejam comparáveis, deve-se ter o cuidado de que as discretizações espacial h e temporal τ satisfaçam a seguinte relação aproximada:

$$\frac{\tau}{h} \approx \frac{\tau_0}{h_0} \tag{1.1}$$

Onde τ_0 e h_0 são o período característico e a escala espacial característica do fenômeno estudado. Entretanto, devido a natureza das equações primitivas, que sustentam as ondas gravitacionais rápidas, e da natureza dos problemas de diferenças finitas, que exigem determinada ligação entre τ e h como conseqüência da condição de estabilidade linear do esquema; geralmente é impossível escolher essa relação aproximada e ao mesmo tempo preservar a eficiência da passagem de um passo temporal ao seguinte ([11], [9]). Sendo essa ligação uma versão "prática" da condição de Courant-Friedrichs-Lewy.

Sabe-se que as equações hidrostáticas linearizadas contêm duas famílias de ondas mistas (gravitacionais-inerciais-advectivas) com velocidade até $350\,m/s$ e uma família de ondas advectivas com velocidades até $80\,m/s$. Portanto, a utilização de esquemas semi-implícitos (eulerianos e semi-lagrangeanos) que aproximam de modo implícito esses termos, é bem justificável, porque permite, de certo modo, adequar melhor os passos temporal e espacial do que nos esquemas explícitos. Permitindo uma menor quantidade de passos temporais sem perda de qualidade das previsões ([9],[10]).

Os métodos numéricos de solução tradicionalmente usados para estes tipos de problemas são os métodos iterativos de Jacobi, Gauss-Seidel ou o SOR ("sucessive over-relaxation"). Entretanto, a taxa de convergência desses métodos depende significativamente da resolução. Para alta resolução (h pequeno) temos convergência lenta, com consumo de tempo de máquina não desejável. Por sua vez as técnicas "multigrid" introduzidas por Fedorenko [8] e generalizadas por Achi Brandt [6], são teoricamente mais eficientes. Mas como sabemos, na avaliação da eficiência de qualquer algoritmo iterativo faz-se uso de avaliação assintótica do número de operações, ou seja, estudam-se os casos quando o número de nós da malha é muito grande. E nesse caso para uma malha de dimensões fixas, os métodos multigrade podem exigir bastante tempo computacional e por isso na prática são substituídos por outros mais efetivos ([2]).

Então nesse contexto nós apresentamos uma abordagem que consiste da combinação da técnica de separação com algoritmos semi-implícitos numa malha com disposição desencontrada das variáveis, que resultam em equações unidimensionais que são resolvidas em cada passo do tempo através de uma versão eficiente da eliminação gaussiana.

2. O MODELO BAROTRÓPICO

A análise de um meio fluido em condição hidrostática sob um referencial não-inercial, fora da camada limite, junto com a suposição barotrópica e outras adicionais, nos permite apresentar o seguinte sistema de equações barotrópicas.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial \phi}{\partial x}+fv\\
&\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial \phi}{\partial y}-fu\\
&\frac{\partial \phi}{\partial t}+u\frac{\partial \phi}{\partial x}+v\frac{\partial \phi}{\partial y}=-c^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Neste sistema u e v são as componentes zonal e meridional do vetor velocidade, ϕ é a energia potencial da partícula que se encontra no nível de pressão P, f ($\equiv 2\ \Omega$ sem φ) é o parâmetro de Coriolis, sendo que os valores φ e Ω aqui representam a latitude e velocidade angular da Terra respectivamente, por último, c representa a velocidade do som neste meio.

Uma análise linear deste sistema nos permite obter as famílias de ondas descritas no modelo, o que possibilita entender o significado físico dos critérios da estabilidade linear dos esquemas numéricos que usamos neste trabalho. A saber, neste trabalho os esquemas utilizados são: o esquema *leap-frog* e o esquema de *Robert*.

3. AS EQUAÇÕES DE ÁGUAS-RASA

Se analisarmos um meio fluido homogêneo de espessura h(x, y, t), sob um referencial não-inercial (em nosso caso a Terra), as equações do movimento para esse meio se descrevem pelas mesmas equações hidrostáticas, junto com a suposição de que a equação de estado desse meio líquido é dada por

$$\rho = \text{const.} \tag{3.1}$$

Com isso obtemos um sistema de equação que difere do sistema barotrópico, anteriormente apresentado, apenas pelo termo representante da energia potencial ϕ em vez de c^2. Portanto as famílias de ondas descritas por esse modelo diferem das famílias descritas por aquele modelo, apenas pela influência do termo de geopotencial.

4. UM ESQUEMA EFICIENTE

A busca de esquemas numéricos econômicos no contexto dos modelos baroclínicos é um dos problemas com que se ocupam os pesquisadores da área de modelagem hidrodinâmica. Vários esquemas tem sido propostos e alguns deles foram incorporados em setores operacionais e de pesquisa em centros de previsão de fenômenos da atmosfera e dos oceanos. Não obstante, algumas versões de esquemas cuja elaboração consiste da combinação da técnica de separação de implicidade com algoritmos semi-implicitos, são atraentes por que resultam em equações elípticas unidimensionais que podem ser resolvidas em cada passo do tempo através do método econômico de varredura (versão econômica de eliminação gaussiana). Mas as tentativas de generalização aos modelos baroclínicos não têm sido bem sucedidas por causa do erro adicional que a técnica de separação de implicidade introduz [1].

Os dois métodos de separação de implicidade mais usados são o ADI (Alternating Directions Implicit) e FS (Fractional Steps). Para o método ADI ver [3]. Para o método FS aplicado às equações hidrostáticas, ver [4]. O caso FS aplicado às equações barotrópicas sem termos de segunda ordem, numa malha com disposição desencontrada das variáveis, ver [7].

Para iniciar a descrição do processo de elaboração do esquema objeto deste trabalho, apresentamos o esquema de *Robert* menos o esquema *leap-frog* com implicidade separada da seguinte forma.

$$
\begin{aligned}
&\frac{u^{*}_{lj}-u^{\sim n+1}_{lj}}{2\tau}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\phi^{*}_{l+1j}-\phi^{*}_{lj}}{h}+\frac{\phi^{n-1}_{l+1j}-\phi^{n-1}_{lj}}{h}-2\frac{\phi^{\sim n}_{l+1j}-\phi^{\sim n}_{lj}}{h}\right)\\
&\frac{V^{*}_{lj}-V^{\sim n+1}_{lj}}{2\tau}=0\\
&\frac{\phi^{*}_{lj}-\phi^{\sim n+1}_{lj}}{2\tau}=-\frac{c^{2}}{2}\left(\frac{u^{*}_{lj}-u^{*}_{l-1j}}{h}+\frac{u^{n-1}_{lj}-u^{n-1}_{l-1j}}{h}-2\frac{u^{\sim n}_{lj}-u^{\sim n}_{l-1j}}{h}\right)\\
&\frac{u^{n+1}_{lj}-u^{*}_{lj}}{2\tau}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\phi^{n+1}_{l+1j}-\phi^{n+1}_{lj}}{h}-\frac{\phi^{*}_{l+1j}-\phi^{*}_{lj}}{h}\right)\\
&\frac{V^{n+1}_{lj}-V^{*}_{lj}}{2\tau}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\phi^{n+1}_{lj}-\phi^{n+!}_{lj+1}}{h}+\frac{\phi^{n-1}_{lj}-\phi^{n-1}_{lj+1}}{h}-2\frac{\phi^{\sim n}_{lj}-\phi^{\sim n}_{lj+1}}{h}\right)\\
&\frac{\phi^{n+1}_{lj}-\phi^{*}_{lj}}{2\tau}=-\frac{c^{2}}{2}\left(\frac{V^{n+1}_{lj-1}-V^{n+1}_{lj}}{h}+\frac{V^{n+1}_{lj}-V^{n-1}_{lj}}{h}-2\frac{V^{\sim n}_{lj-1}-V^{\sim n}_{lj}}{h}\right)
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

Onde esse conjunto de equações algébricas foi obtido pela combinação dos dois esquemas citados, com posterior aplicação do método FS. Dessa forma, atingimos dois objetivos: corrigimos a estabilidade do esquema numéricos no sentido de enfraquecer a restrição do passo temporal e obtemos equações unidimensionais. Nessa técnica o esquema mais estável é chamado de esquema limite e o esquema absolutamente explicito é chamado de esquema auxiliar. Com isso fica claro que a estabilidade do esquema acima é dada pelas mesmas restrições do passo temporal que a do esquema limite.

Feito isso, explicitando u^{*}_{lj} na primeira equação e v^{n+1}_{jl} na quinta equação podemos formar dois problemas unidimensionais, um para os valores de ϕ^{*}_{lj} e outro para os valores ϕ^{n+1}_{lj}.

Levando-se em consideração que os valores da função incógnita u^{*}_{lj} nos pontos da fronteira são dados, temos os dois seguintes casos para o problema unidimensional da função discreta ϕ^{*}_{lj}:

(i) $l = 2,\ j=\overline{2,J-1}$

$$-\left(\frac{\tau c}{h}\right)^2 \phi^*_{l+1j} + \left(1+\left(\frac{\tau c}{h}\right)^2\right)\phi^*_{lj} = f^1_{lj} \tag{4.2}$$

(ii) $\quad l=\overline{3,L-1}, j=\overline{2,J-1}$

$$-\left(\frac{\tau c}{h}\right)^2 \phi^*_{l+1j} + \left(1+2\left(\frac{\tau c}{h}\right)^2\right)\phi^*_{lj} - \left(\frac{\tau c}{h}\right)^2 \phi^*_{l-1j} = f^2_{lj} \tag{4.3}$$

Onde as funções discretas f^1_{lj} e f^2_{lj} contém os valores de u e ϕ no nível *n-1* e os valores n e $n+1$ do esquema leap-frog.

Com consideração semelhante, obtemos dois casos para os valores da função discreta ϕ^{n+1}_{lj}:

(iii) $\quad j = 2,\ l = \overline{2,L-1}$

$$-\left(\frac{\tau c}{h}\right)^2 \phi^{n+1}_{lj+1} + \left(1+\left(\frac{\tau c}{h}\right)^2\right)\phi^{n+1}_{lj} = f^3_{lj} \tag{4.4}$$

(iv) $\quad j = \overline{3,J-1}, l = \overline{2,L-1}$

$$-\left(\frac{\tau c}{h}\right)^2 \phi^{n+1}_{lj+1} + \left(1+2\left(\frac{\tau c}{h}\right)^2\right)\phi^{n+1}_{lj} - \left(\frac{\tau c}{h}\right)^2 \phi^{n+1}_{lj-1} = f^4_{lj} \tag{4.5}$$

Onde, as funções discretas f^3_{lj} e f^4_{lj} contém os valores de v e ϕ no nível intermediário (*) e no nível n-1 e os valores leap-frog das mesmas no nível n.

Para fecharmos esses quatro subsistemas, as condições de fronteira devem ser atribuídas nos pontos $l=1$, $l=L$, $j=1$ e $j=J$. Com isso temos um problema na forma tridiagonal com coeficientes variáveis que é resolvido pela aplicação do algoritmo de varredura.

5. RESULTADOS

A avaliação da estabilidade do esquema foi feita utilizando os dados artificiais e com campos meteorológicos reais. Alguns testes para previsão de até 3 dias confirmaram a estimativa [12], entretanto alguns campos de prognósticos nos últimos passos de tempo demonstraram um pequeno incremento de perturbações oriundas pela presença de ondas curtas para um passo de 16 minutos. Para passos de 14 minutos nenhum tipo de instabilidade foi observado.

O desempenho do esquema proposto foi investigado segundo [5] realizando trinta previsões de 24 horas com passo temporal de 15 minutos numa grade de 89×105 pontos e passo horizontal $h = 75$ km centralizada nas seguintes coordenadas geográficas 30^0 S 52^0 W, utilizando dados de análise objetiva do NCEP (National Centers for Environment Prediction).

Várias medidas do campo de geopotencial foram feitas utilizando técnicas estatísticas. Essas medidas estatísticas forneceram resultados equivalentes aos da seguinte tabela:

Tabela1. Medidas estatísticas de qualidade dos prognósticos de 24 horas de antecedência ε são as diferenças médias quadráticas em metros entre previsão do campo de geopotencial e o campo de análise objetiva; r são os coeficientes de correlação (não dimensional) entre tendências prognósticas do campo de geopotencial e tendências observadas; s são as medidas de acerto das tendências espaciais.

Esquema	ε	*r*	*s*
Leap-frog	48	0,76	32
Passos fracionários	49	0,78	31

Fonte: [7]

6. CONCLUSÕES

Apesar de apresentar o inconveniente de não descrever uma estrutura vertical da atmosfera, os modelos barotrópicos tem sua utilidade por possibilitarem que os esquemas desenvolvidos para sua resolução apresentem as propriedades de aproximação (consistência), estabilidade e convergência, como casos limites para a passagem a modelos mais completos (baroclínicos). Também esses modelos possibilitam, de modo aproximado, fazer previsões no nível da atmosfera em que a divergência do vento é igual a zero (aproximadamente 500 hPa).

As equações de águas-rasa são, por sua vez, aceitáveis para um oceano raso ou uma atmosfera homogênea, na qual a Terra isotérmica teria um limite superior a 8 *km*, que eqüivale aproximadamente a isóbara p = 0.

As comparações das medidas estatísticas, passo temporal e tempo gasto para uma previsão confirmaram que o esquema elaborado é mais eficiente que os esquemas leap-frog e o de Robert, validando a técnica de separação usada em sua elaboração.

7. REFERENCIAS

1. BATES, J. R., McDonald, A. A semi-Lagrangian and alternating direction implicit method for intgrating a multilevel primitive equation model. Short and Medium Range Numerical Weather Prediction. Ed. T. Matsuno. Universal Academy Press, Japan, 1987, p.223-231.
2. BATES, J. R, MOORTHI, S., HIGGINS, R. W. A global multilevel atmospheric model using a vector semi-Lagrangian finite-difference scheme. Part I: Adiabatic formulation. Mon Wea. Rev., 1993, p. 244 – 263 .

3. BOURCHTEIN, A. Estudo comparativo de dois métodos econômicos aplicados a um esquema numérico de previsão do tempo. Rev. Bras. Geof., mar. 1998, vol. 16, no. 1, p. 27–36.
4. BOURCHTEIN, A., DIAS, F. L., Esquema hidrodinâmico com implicidade localmente unidimensional. XXIII CNMAC, 2000, p. 245.
5. BOURCHTEIN, A., BOURCHTEIN, L., DIAS, F. L., Modelo numérico de previsão do tempo com utilização do método de passos fracionários, IX CLIMET, VIII CONGREMET. Buenos Aires. 2001.
6. BRANDT, A. 1973: Multi-level adaptive technique (MLAT) for fast numerical solution to boundary value problems. Proc. Third Int. Conf. Numerical Methods in Fluid Mechanics, Paris, 1972, Lecture Notes in Physics, H. Cabannes and R, Temam, Eds., Springer – Verlag, 18, 82 – 89.
7. DIAS, F. L. Elaboração de um esquema eficiente para resolução do modelo barotrópico e das equações de águas-rasa. Pelotas. 2001. Tese (Mestrado). Universidade Federal de Pelotas. Faculdade de Meteorologia.
8. FEDORENKO, R. P., A relaxation method for solving elliptic difference equations. U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys. 1, 1962, p. 1092 – 1096.
   The speed of covergence for a interative process. U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys., 4, 1964, p. 227 – 235.
9. HALTINER G. J., Williams R. T. Numerical Prediction and Dynamic Meteorology. New York. Wiley, 1980.
10. KRISHNAMURTI, T. N., BOUNOUA L. An Introduction to Numerical Weather Prediction Techniques. Lewis Pub,. 1996.
11. MESINGER, F., ARAKAWA, A. Numerical Methods used in Atmospheric Models. GARP Publ. Series Nº 17, 1976.
12. MOORTHI S., HIGGINS R. W., Bates J. R., A global multilevel atmospheric model using a vector semi-Lagrangian finite-difference scheme. Part II: Version with physics. Mon. Wea. Rev., 1995, p. 123, 1523 – 1541.