

Um modelo para simulação de ensaios oedométricos pelo método dos elementos finitos

Maicon S. Moreira¹, Waldir T. Pinto¹ e Cláudio R. R. Dias¹

¹Programa de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica — FURG, Rio Grande – RS, Brasil
— maicon.moreira@ibest.com.br, waldir.pinto@gmail.com e claudio@dmc.furg.br

RESUMO: Ensaios oedométricos são freqüentemente utilizados no âmbito da Mecânica dos Solos. Podem ser usados para investigações de compressão e expansão do solo ou adensamento. A popularidade destes ensaios está ligada à sua simplicidade de realização bem como ao fato das condições de deformação serem similares às encontradas em problemas reais. Este trabalho apresenta um modelo acoplado de adensamento baseado no método dos elementos finitos para casos com simetria axial dando ênfase à simulação de ensaios oedométricos. O modelo utiliza elementos isoparamétricos e considera linearidade física. Do ponto de vista geométrico, a não-linearidade é considerada através de um processo de atualização da malha de elementos finitos. Primeiramente, realizou-se uma calibração do modelo através do ajuste dos parâmetros do solo em função de resultados obtidos em ensaios realizados em laboratório. O trabalho apresenta simulações de situações com ou sem a consideração da não-linearidade geométrica. Os resultados mostram a influência da não-linearidade e a viabilidade do uso do modelo na previsão do comportamento do solo para diversas situações de campo bem como para a realização de análises rápidas com variação dos parâmetros do solo.

PALAVRAS-CHAVE: Adensamento, Elementos finitos, Simetria axial, Ensaio oedométrico.

1. INTRODUÇÃO

Um dos problemas mais complexos da geotecnia é a análise acoplada do adensamento em mais de uma dimensão. Adensamento é a diminuição de volume do solo por expulsão do fluido intersticial quando este sofre uma sobrecarga — um problema que envolve análise transitória de deformação e análise de escoamento em um meio poroso. A análise acoplada é necessária em solos altamente compressíveis e pouco permeáveis, ou seja, sujeitos a grandes deformações volumétricas que podem levar muito tempo para ocorrer devido à baixa permeabilidade. O termo acoplamento significa que o campo de tensão efetiva não pode ser obtido sem a obtenção simultânea do campo de pressão neutra. Com a consideração das não-linearidades geométrica e/ou física a complexidade da obtenção simultânea desses dois campos aumenta.

Este trabalho apresenta um modelo numérico para análise acoplada do adensamento para problemas com simetria axial voltados para a simulação de ensaios oedométricos. O modelo utiliza o método dos elementos finitos para integração espacial e o método das diferenças finitas para integração temporal das equações diferenciais de governo. A obtenção dessas equações diferenciais dá-se a partir das equações de equilíbrio das fases sólida e líquida e da conservação da massa do fluido intersticial. Admite-se que não existe transporte de partículas sólidas. A não-linearidade geométrica será considerada por meio da atualização da malha de elementos finitos para cada passo da integração ao longo do tempo. A não-linearidade física

não foi considerada. Resultados são apresentados para a simulação de um ensaio oedométrico mostrando a influência da não-linearidade geométrica.

O artigo apresenta uma breve revisão da formulação acoplada do adensamento, seguida das descrições do ensaio e do modelo numérico acoplado, apresentando a seguir os resultados e as conclusões do trabalho.

2. FORMULAÇÃO ACOPLADA DO ADENSAMENTO

A formulação do adensamento baseia-se no equilíbrio de um elemento de solo e na conservação da massa de fluido intersticial. Considera-se que não há transporte de sólidos. Em casos com simetria axial, as equações diferenciais de equilíbrio de um elemento são (Timoshenko e Goodier [4]):

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\sigma_x - \sigma_\theta}{x} + f_x = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\tau_{xy}}{x} + f_y = 0 \quad (2)$$

sendo x a coordenada radial, θ a coordenada circunferencial e y a coordenada vertical, σ_x , σ_y e σ_θ são as tensões normais nas respectivas direções e τ_{xy} são as tensões cisalhantes nos planos xy e yx .

A equação da conservação da massa do fluido intersticial é dada por (Zienkewicz e Taylor [6]):

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} = 0 \quad (3)$$

onde ε_v é a deformação volumétrica, v_x é a componente radial e v_y é a componente vertical da velocidade do fluido intersticial.

As Equações (1), (2) e (3) formam um sistema de três equações diferenciais, possuindo sete incógnitas — quatro componentes de tensão, duas componentes da velocidade do fluido e a deformação volumétrica. Para reduzir-se o número de incógnitas, utiliza-se relações auxiliares que são o princípio da tensão efetiva, a relação constitutiva do solo, a lei de Darcy e a relação deformação versus deslocamento.

O princípio da tensão efetiva relaciona o tensor de tensões totais com o tensor de tensões efetivas e a poropressão. Em notação vetorial:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' + m\mathbf{p} \quad (4)$$

sendo $\boldsymbol{\sigma}$ o vetor de tensões totais, $\boldsymbol{\sigma}'$ o vetor de tensões efetivas, \mathbf{m} o vetor equivalente ao delta de Kronecker e p a pressão no fluido intersticial.

A relação constitutiva para um material elástico-linear em condições de simetria axial é:

$$\mathbf{C} = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix} \quad (5)$$

onde E é o módulo de Young e μ é o coeficiente de Poisson.

A lei de Darcy relaciona as velocidades com os gradientes da carga hidráulica total. Essa relação pode ser escrita como:

$$\mathbf{v} = -\mathbf{k}\nabla h = \frac{-\mathbf{k}}{\gamma_w} \nabla p \quad (6)$$

onde \mathbf{k} é a matriz de permeabilidade do solo, h é a carga total e p é o excesso de poropressão.

Finalmente, a relação deformação versus deslocamento pode ser escrita a partir da hipótese de pequenas deformações como (Timoshenko e Goodier, [4]):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left[\frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{u}{x} \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right]^T \quad (7)$$

Neste caso, a deformação volumétrica pode ser escrita como:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{u}{x} \quad (8)$$

Baseando-se nestas relações, as equações de governo podem ser escritas em função dos deslocamentos nas direções radial e circunferencial e do excesso de poropressão, ou seja, o sistema de três equações diferenciais passa a ter três incógnitas.

3. O ENSAIO OEDOMÉTRICO

Neste ensaio, a amostra de solo é um disco contido em um cilindro rígido de metal de modo que a deformação radial ou horizontal é igual a zero. Desse modo, a deformação axial é igual à deformação volumétrica. Discos porosos no topo e no fundo do aparelho agem como drenos. No aparato convencional, a tensão axial é aplicada através da adição ou remoção de pesos, logo a tensão é controlada e a carga é aplicada em estágios. A deformação axial pode ser facilmente medida.

As poropressões no topo são iguais a zero. Dependendo do oedômetro, a poropressão no fundo poderá ou não ser medida bastando, para isso, impedir a drenagem na parte inferior do aparelho.

O ensaio pode ser utilizado para investigar a compressão e expansão do solo ou o seu adensamento. O fato de sua realização ser bastante simples, contribui para sua popularidade e, também, as condições de deformação são similares às encontradas em problemas reais.

A Figura 1 traz um esquema da aparelhagem de ensaio.

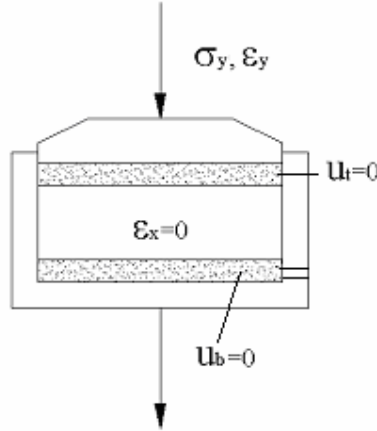


Figura 1 — Esquema da aparelhagem para o ensaio oedométrico

4. FORMULAÇÃO DO MODELO NUMÉRICO

O modelo numérico é baseado no método dos elementos finitos (MEF) para integração espacial e no método das diferenças finitas (MDF) para integração temporal. A formulação de elementos finitos utilizada neste trabalho foi obtida a partir da aplicação do método dos resíduos ponderados (MRP) nas equações diferenciais usando o método de Galerkin. Esta aplicação transforma as equações diferenciais em equações integrais através da adoção de funções que são combinadas para interpolar as variáveis dependentes do problema. As variáveis dependentes podem ser escritas como:

$$\mathbf{u}(x, y, t) = \mathbf{u}_i(t) N_i(x, y) \quad (9)$$

onde N_i são funções de interpolação conhecidas e \mathbf{u}_i são os valores nodais da variável dependente \mathbf{u} .

As equações integrais obtidas pelo MRP podem ser escritas como:

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\sigma_x - \sigma_{\theta}}{x} + f_x \right] W_i d\Omega = 0 \quad (10)$$

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\tau_{xy}}{x} + f_y \right] W_i d\Omega = 0 \quad (11)$$

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{\partial \epsilon_v}{\partial t} \right] \bar{W}_i d\Omega = 0 \quad (12)$$

onde W_i e \bar{W}_i são funções de ponderação. No método de Galerkin adota-se as funções de interpolação como funções de ponderação. Este procedimento aliado à formulação fraca do MRP reduz o requerimento de continuidade das funções de interpolação. A formulação fraca é obtida mediante a aplicação do teorema da divergência de Gauss em combinação com a fórmula de derivação do produto, onde há transformação de uma integral de volume numa integral de superfície. As equações integrais de governo agora são:

$$\int_{\Omega} \left(\sigma_x \frac{\partial N_i}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial N_i}{\partial y} + \frac{\sigma_{\theta}}{x} N_i \right) d\Omega = F_{xi} \quad (13)$$

$$\int_{\Omega} \left(\tau_{xy} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) d\Omega = F_{yi} \quad (14)$$

$$\int_{\Omega} \left(v_x \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial x} + v_y \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial x} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \left(-\frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial y} + \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial t} \bar{N}_i \right) = P_i \quad (15)$$

A integração no tempo é efetuada pelo MDF onde as variáveis dependentes são aproximadas por:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) = \frac{u^{k+1} - u^k}{\Delta t} \quad (16)$$

As variáveis dependentes podem ser expressas em função dos seus valores para o tempo t e para o tempo $t + \Delta t$ como:

$$u(x, y, t) = (1 - \zeta)u(x, y, t) + \zeta u(x, y, t + \Delta t) = (1 - \zeta)u^k + \zeta u^{k+1} \quad (17)$$

onde $t = k\Delta t$ e $\zeta = \frac{t - t_0}{\Delta t}$.

Os valores de ζ definem o algoritmo a ser utilizado: $\zeta = 0$ explícito, $\zeta = 1$ implícito, $\zeta = 0,5$ Crank-Nicholson e $\zeta = 2/3$ Galerkin.

No método dos elementos finitos o domínio é dividido em subdomínios de forma definida. Os pontos de controle em cada elemento são os nós, através dos quais ocorre a comunicação dos diversos elementos com seus vizinhos.

Os elementos adotados neste trabalho são do tipo isoparamétrico. O elemento é um quadrilátero e as coordenadas dos pontos no seu interior são interpoladas a partir das coordenadas nodais e das mesmas funções de interpolação usadas na aproximação das variáveis dependentes. A adoção deste tipo de elemento é conveniente, pois é possível aumentar o número de nós sem alterações de geometria.

A formulação de elementos isoparamétricos utiliza um mapeamento do elemento através de coordenadas naturais. As coordenadas de um ponto no interior do elemento são interpoladas por:

$$x_i = x_j N_j(r, s) \quad (18)$$

As derivadas das variáveis dependentes em relação às coordenadas (x_i) estão relacionadas com as derivadas destas funções em relação às coordenadas naturais (r,s) por meio da seguinte forma matricial (em duas dimensões):

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

onde a matriz da Equação (19) é a matriz Jacobiana.

Usando este procedimento e definindo o vetor de variáveis dependentes nodais como:

$$\mathbf{u} = [u_1 \quad v_1 \quad \dots \quad u_n \quad v_n \quad p_1 \quad \dots \quad p_n] \quad (20)$$

onde n é o número de nós, pode-se escrever as relações a seguir.

Relação deformação versus deslocamento:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (21)$$

Relação constitutiva:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u} \quad (22)$$

Gradiente do excesso de poropressão:

$$\nabla \mathbf{p} = \mathbf{D}\mathbf{p} \quad (23)$$

Velocidade do fluido intersticial:

$$\mathbf{v} = -\frac{1}{\gamma_w} \mathbf{k}_w \mathbf{D}\mathbf{p} \quad (24)$$

As equações de governo ficam:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^{k+1} \\ \mathbf{p}^{k+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \end{Bmatrix} \quad (25)$$

onde:

Tabela 1 — Coeficientes da Equação (25)

i	A_{i1}	A_{i2}	\mathbf{F}_i
1	$\varphi_2 k_1$	$-\varphi_2 k_2$	$\mathbf{F} - \varphi_1 k_1 \mathbf{u}^k + \varphi_1 k_2 \mathbf{p}^k$
2	k_3	$-\varphi_2 k_4$	$\mathbf{P} + k_3 \mathbf{u}^k + \varphi_1 k_4 \Delta t \mathbf{p}^k$

onde \mathbf{F} é o vetor de forças nodais obtidas a partir da integração das forças de volume e da aplicação das condições de contorno e \mathbf{P} é o vetor obtido a partir da aplicação da condição de contorno de poropressão.

A solução das integrais para o contorno externo do domínio juntamente com as expressões correspondentes às condições iniciais forma um sistema de equações do tipo

$$k_{el} \cdot u_{el} = f_{el} \quad (26)$$

A soma da influência de cada elemento no domínio do solo é feita do modo tradicional do MEF de acordo com a conectividade do elemento (Bathe [2], Zienkewicz e Taylor [4]).

5. NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA

A consideração da análise acoplada do adensamento é crítica em solos com alta compressibilidade e baixa permeabilidade. Esta combinação envolve grandes deformações com redução significativa do índice de vazios do solo. Ou seja, grandes deformações e não linearidade geométrica.

A não-linearidade geométrica é considerada mediante a atualização da malha de elementos finitos para cada passo do tempo.

6. SIMULAÇÕES E ANÁLISES

Atkinson [1], apresenta resultados de um ensaio oedométrico com as seguintes características:

- acréscimo de tensão vertical $\Delta\sigma = 210 \text{ kPa}$;
- altura total da amostra igual a 20 mm ;
- drenagem no topo e no fundo da amostra;
- coeficiente de adensamento $c_v = 2 \frac{m^2}{ano} = 0,0634 \frac{mm^2}{s}$;
- coeficiente de compressibilidade $m_v = 4,6 \times 10^{-4} \frac{m^2}{kN} = 0,46 \frac{mm^2}{N}$;
- peso específico do fluido intersticial $\gamma_w = 10^{-5} \frac{N}{mm^3}$

A Tabela 2 traz os dados referentes aos resultados que foram obtidos nesse ensaio.

Tabela 2 — Dados do ensaio

Tempo (min)	Recalque (mm)	U_t	$\sqrt{t} \left(\text{min}^{1/2} \right)$	$\log t$
0	0	0	0	-
0,25	0,206	0,107	0,5	-0,602
1	0,414	0,216	1	0
2,25	0,624	0,325	1,5	0,352
4	0,829	0,432	2	0,602
9	1,233	0,642	3	0,954
16	1,497	0,780	4	1,204
25	1,685	0,878	5	1,398
36	1,807	0,941	6	1,556
49	1,872	0,975	7	1,690
1440	1,920	1,000	-	-

O módulo oedométrico é dado por

$$E_{oed} = \frac{1}{m_v} = 2173,91 \frac{kN}{m^2} = 2,174 \frac{N}{mm^2} \quad (27)$$

E o coeficiente de permeabilidade é dado por

$$k = c_v m_v \gamma_w = 2,9 \times 10^{-7} \frac{mm}{s} \quad (28)$$

Foi adotado um coeficiente de Poisson igual a 0,35 para a análise.

Para a malha, adotou-se 15 divisões tanto na horizontal quanto na vertical, com uma altura de 20 mm e uma largura de 25 mm correspondente à metade do diâmetro da amostra já que o domínio de análise é simétrico em relação ao eixo da coordenada vertical como mostra a Figura 2.

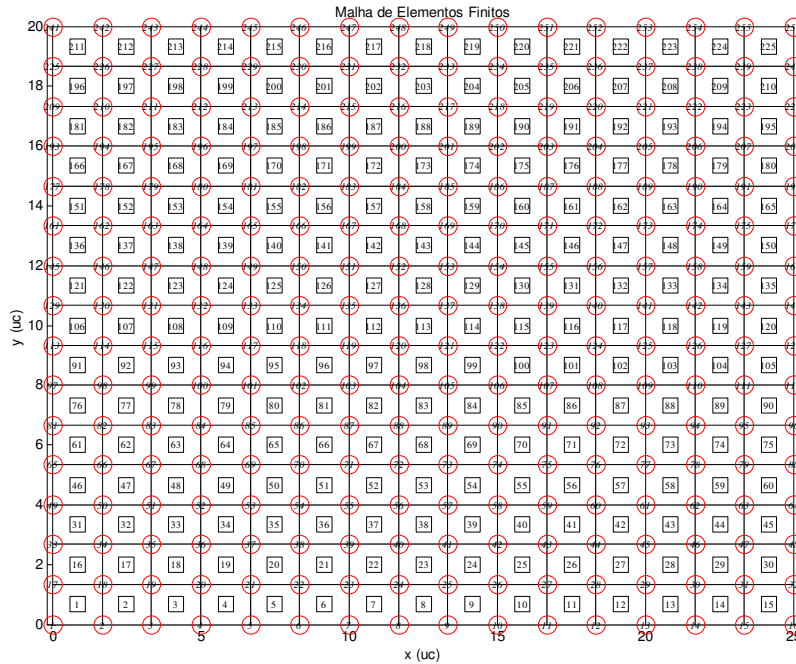


Figura 2 — Malha indeformada para a análise

Escolheu-se um intervalo de tempo de 30 segundos e 100 iterações no tempo, totalizando 50 minutos de tempo de análise. Os resultados obtidos encontram-se dispostos nas Figuras de 3 até 6 nas quais é feita comparação com resultados do ensaio e da solução analítica.

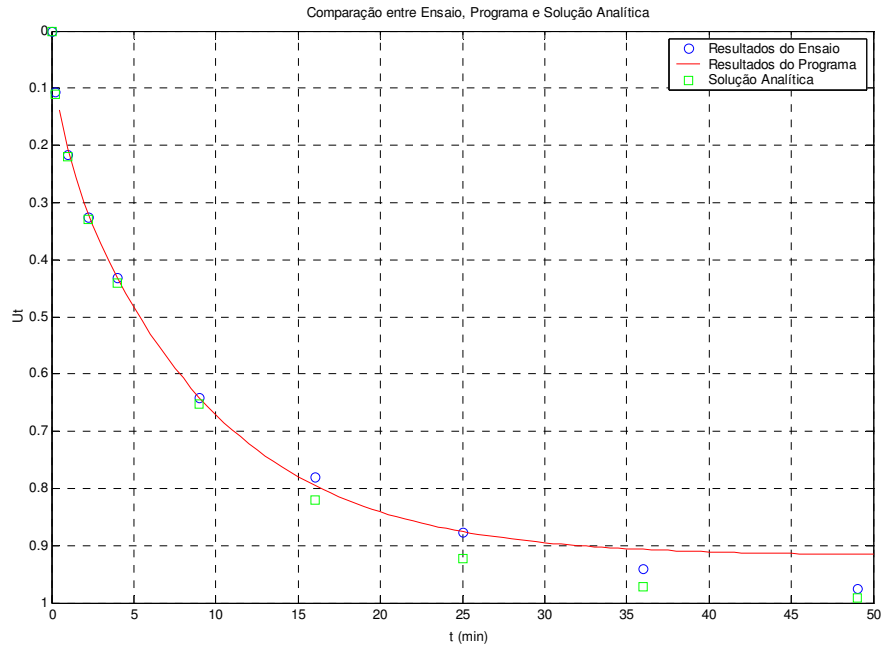


Figura 3 — Comparação entre solução analítica, dados do ensaio e método dos elementos finitos com atualização da malha (curvas simples)

Como é possível observar, os resultados são satisfatórios, ocorrendo uma diferença máxima de 6% para valores maiores de tempo. O motivo para tal ocorrência está na utilização de uma malha atualizável para a simulação da não-linearidade geométrica. A não utilização de tal aspecto acarretaria em resultados coincidentes com a solução analítica como mostra a Figura 4.

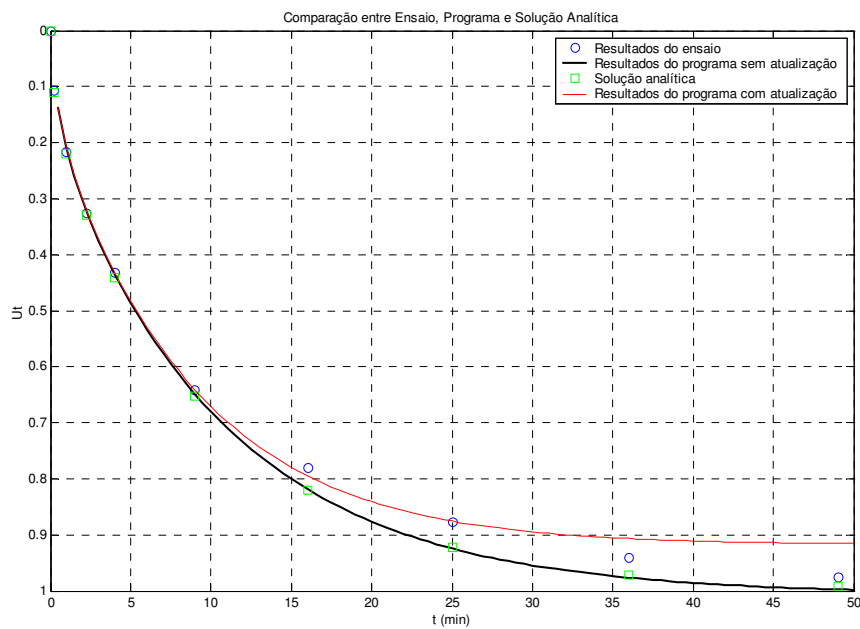


Figura 4 — Comparação entre solução analítica, dados do ensaio e método dos elementos finitos com e sem atualização da malha (curvas simples)

Outro aspecto importante também é o tipo de módulo de Young utilizado. Um módulo não-linear torna o comportamento mais próximo do real já que, com o aumento da deformação, o módulo tende a diminuir, o que aproximaria os comportamentos. Também pode ser decorrência da fluência do material ou adensamento secundário.

A seguir, são apresentados gráficos de percentagem de adensamento versus logaritmo do tempo (Figura 5) e versus raiz do tempo (Figura 6), representações usuais da Mecânica dos Solos .

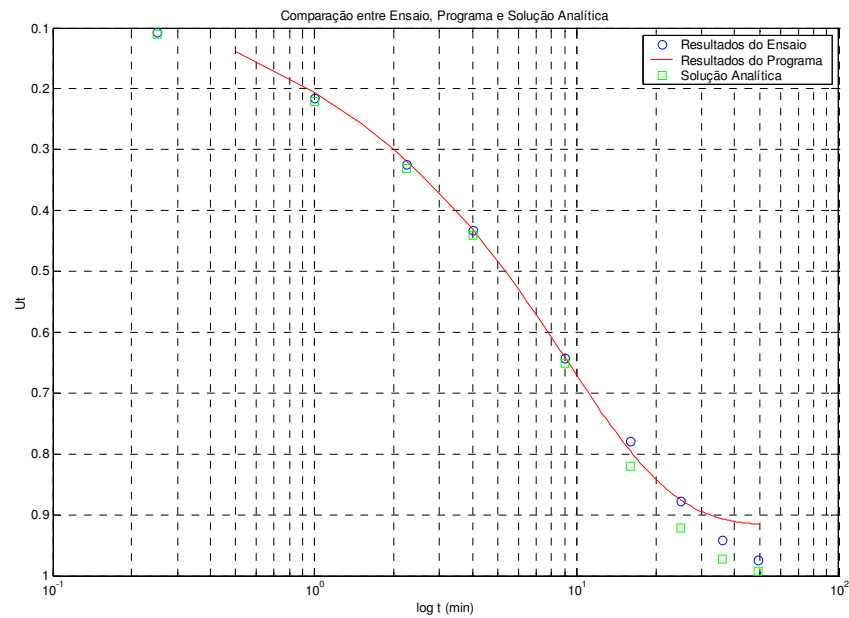


Figura 5 — Compara o entre soluço analítica, dados do ensaio e método dos elementos finitos com atualiza o (versus logaritmo do tempo)

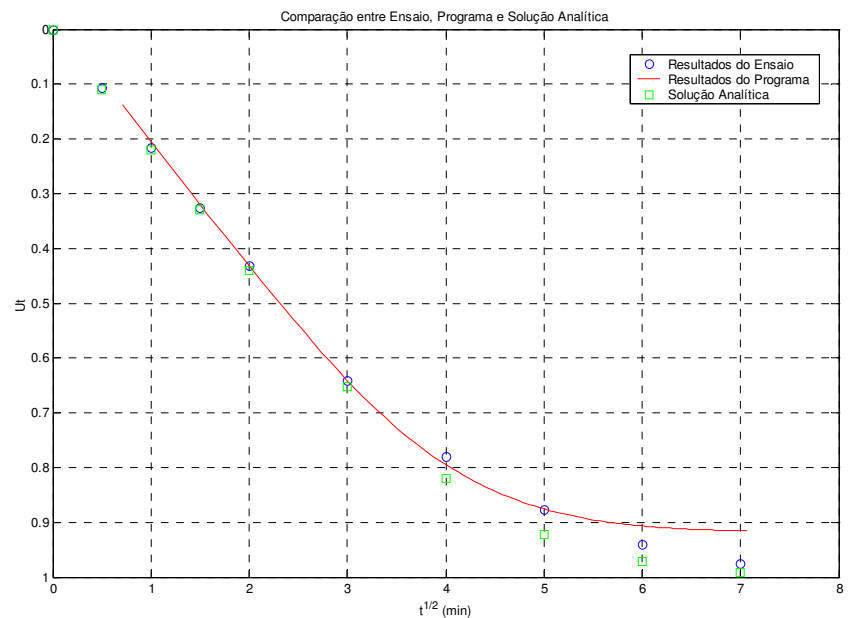


Figura 6 — Compara o entre soluço analítica, dados do ensaio e método dos elementos finitos com atualiza o (versus raiz do tempo)

Outro ponto importante da análise é o gráfico de distribuição de pressões ao longo do tempo na seção central da amostra (sobre o eixo de simetria). Os resultados estão na Figura 7.

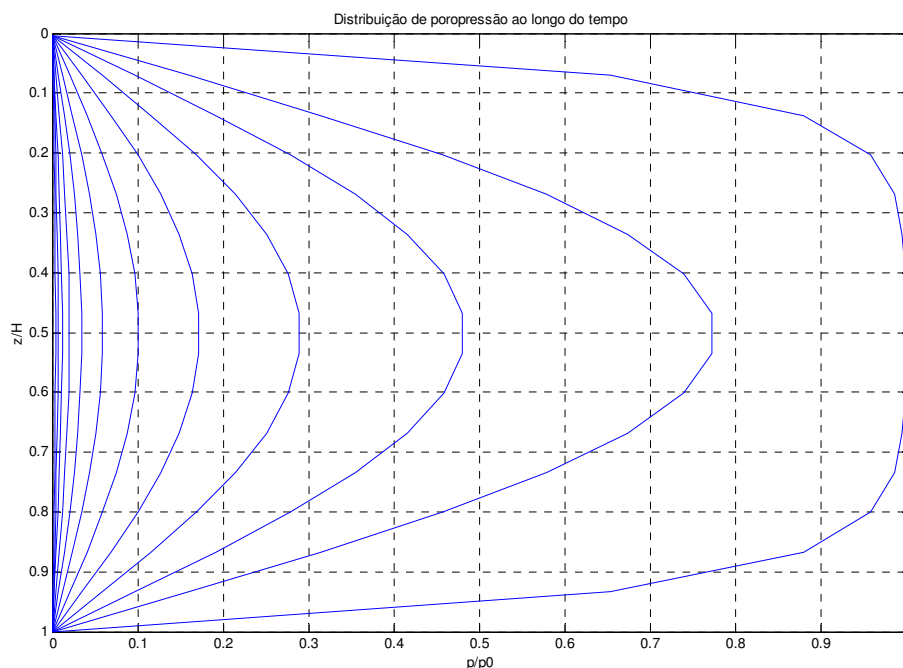


Figura 7 — Distribuição de poropressão ao longo do tempo

7. CONCLUSÕES

Este artigo apresentou um modelo para a análise acoplada do adensamento voltado para a simulação de ensaios oedométricos. Apresentou-se a comparação dos resultados do modelo com resultados experimentais de um ensaio oedométrico. Os resultados oferecidos pelo modelo foram bastante satisfatórios.

A performance do modelo pode ser melhorada a partir da consideração da não-linearidade física, sobretudo no que se refere à variação do coeficiente de permeabilidade.

As principais constatações às quais chegou-se após as análises são listadas a seguir:

- a consideração ou não da não-linearidade geométrica influi de maneira considerável nos resultados. Sua consideração na modelagem do ensaio oedométrico tende a aproximar os resultados daqueles obtidos em um ensaio real. Sua não consideração aproxima os resultados daqueles obtidos na solução analítica. Isso era esperado e foi considerado satisfatório;
- é bastante simples alterar parâmetros de análise — como o intervalo de tempo, o tempo total de análise e o valor de ζ — produzindo uma grande gama de resultados sem maiores dificuldades com um só programa.

Como comentário final pode-se afirmar que o objetivo foi atingido com sucesso e que o modelo pode ser bastante útil na análise da influência dos diversos parâmetros e fatores em um ensaio oedométrico.

REFERÊNCIAS

1. ATKINSON, J.H., *An Introduction to the Mechanics of Soils and Foundations*. London: McGraw-Hill, 1993.
2. BATHE, K-J., 1982, *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, New Jersey.
3. LAMBE, T.W. & WHITMAN, R.V., 1979, *Soil Mechanics, SI Version*, John Wiley & Sons, New York.
4. MOREIRA, M.S., 2006, *Um Modelo de Elementos Finitos para a Análise Acoplada de Problemas de Adensamento com Simetria Axial*, Dissertação de Mestrado em Engenharia Oceânica, FURG, Rio Grande, RS, Brasil.
5. TIMOSHENKO, S.P., GOODIER, J.N., *Teoria da Elasticidade*. 3.^a Edição. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1980. 552 p.
6. ZIENKIEWICZ, O.C. & TAYLOR, R.L., 1991, *The Finite Element Method, vol. 1 Basic Formulation and Linear Problems*, 4th ed., McGraw-Hill, London.